Introduzione alla logica
La logica del primo ordine

Borgo, Guarino
Laboratory for Applied Ontology, ISTC-CNR, www.loa-cnr.it
Corso AI, Univ. di Trento 2007

Argomenti trattati

- ▷ Dove eravamo
- ▷ Cosa vogliamo
  - Analisi preliminare
  - Sintassi (linguaggio)
  - Semantica
  - Modelli
  - Conseguenza logica
  - Deduzione (inferenza, risoluzione)

Logica

ci eravamo fermati alla logica proposizionale...

Analisi preliminare

Nella rappresentazione della conoscenza, la logica proposizionale ha molti vantaggi ma anche limitazioni:

▷ è dichiarativa

▷ consente di usare espressioni disgiuntive e negative

▷ è composizionale:
per es. il significato di $A \wedge B$ si ottiene da quello di A e B

▷ il significato delle formule è indipendente dal contesto
(a differenza del linguaggio naturale)

▷ l'espressività è limitata
(niente oggetti, niente proprietà,...)

Parlare di cose usando relazioni e funzioni

La logica del primo ordine assume che (i) ci sono oggetti nel mondo e che (ii) possiamo predicare su di essi.

(i) Oggetti: persone, sedie, pianeti, molecole...

(ii) - Relazioni (possono richiedere uno o più argomenti): essere blu, essere parte di, essere più alto di, precedere, stare tra...

- Funzioni (possono richiedere uno o pù argomenti): il successivo di, il padre di, la somma di...

La logica non stabilisce quali cose sono oggetti, relazioni o funzioni. La scelta spetta all'utente che decide nell'applicare la logica qual è l'insieme di oggetti di cui vuole parlare e le relazioni e funzioni che vuole usare.

Logica del primo ordine: linguaggio

Il linguaggio - 1

Il linguaggio della logica del primo ordine è costituito da
1) simboli logici

- $\triangleright$ I connettivi proposizionali: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- $\triangleright$ Le costanti proposizionali $\top$ e $\bot$
- $\triangleright$ Il simbolo di uguaglianza $=$
  (può essere omesso)
- $\triangleright$ I simboli separatori '(', ')' e ','
- $\triangleright$ I simboli di variabile individuale $x_1, x_2, \ldots$
- $\triangleright$ Il simbolo di quantificazione universale $\forall$
- $\triangleright$ Il simbolo di quantificazione esistenziale $\exists$

Il linguaggio - 2

2) ...e simboli 'non-logici' o parametri

- ▷ I simboli di predicato ciascuno associato ad un numero intero positivo (arità)
- ▷ I simboli di funzione ciascuno associato ad un numero intero positivo (arità)
- ▷ I simboli di costante

Esempi - 1

Il linguaggio "puro" dei predicati

- $\triangleright$ Simbolo di uguaglianza: assente
- $\triangleright$ Simboli di predicato n-ari, $n > 0$: $P_1^n, P_2^n, \ldots$
- $\triangleright$ Simboli di funzione n-ari, $n > 0$: assenti
- $\triangleright$ Simboli di costante: $c_1, c_2, \ldots$

Il linguaggio della teoria degli insiemi

- $\triangleright$ Simbolo di uguaglianza: presente
- $\triangleright$ Simboli di predicato: $\in$ (binario)
- $\triangleright$ Simboli di funzione n-ari, $n > 0$: assenti
- $\triangleright$ Simboli di costante: assenti
  (l'insieme vuoto è spesso usato ma non è necessario)

Esempi - 2

Il linguaggio della teoria elementare dei numeri

- Simbolo di uguaglianza: presente
- Simboli di predicato: $<$ (binario)
- Simboli di funzione: s (unario, la funzione successore), $+$ e $\times$ (binari, addizione e moltiplicazione, rispett.)
- Simboli di costante: 0

Formule per alcuni...

Vediamo come formulare nella logica del primo ordine alcune espressioni del linguaggio naturale.

"Alcuni gatti sono bianchi"
"Qualche sedia è rotta"

1. $\exists x(Gatto(x) \wedge Bianco(x))$

2. $\exists x(Sedia(x) \wedge Rotta(x))$

perché non sono corrette le formulazioni seguenti?

1'. $\exists x(Gatto(x) \rightarrow Bianco(x))$

2'. $\exists x(Sedia(x) \rightarrow Rotta(x))$

...e formule per tutti

Altri esempi di rappresentazione.

"Tutti i pasticcieri sanno fare la torta"

3. $\forall x(Pasticciere(x) \rightarrow SaFare(x, torta))$

"Tutti sono pasticcieri e sanno fare la torta"

4. $\forall x(Pasticciere(x) \wedge SaFare(x, torta))$

"Gli unici dolci buoni sono i cannoli"
cioè "se un dolce è buono, allora è un cannolo"

5. $\forall x((Dolce(x) \wedge Buono(x)) \rightarrow Cannolo(x))$

Un altro esempio... passo passo

Formalizzare: "Chi possiede un cane è un amante degli animali"

1. Individuare predicati, funzioni e costanti.
   Noi prendiamo: $Possiede(x, y)$, $Cane(x)$, $Amante{-}animali(x)$
   nessuna funzione, nessuna costante

2. Fissare gli operatori logici, sistemare le variabili.
   $(Cane(y) \wedge Possiede(x, y)) \rightarrow Amante - animali(x)$

3. Individuare le quantificazioni.
   $\forall x \exists y\, (Cane(y) \wedge Possiede(x, y)) \rightarrow Amante - animali(x)$

4. Sistemare le parentesi.
   $\forall x (\exists y\, (Cane(y) \wedge Possiede(x, y)) \rightarrow Amante - animali(x))$

Termini

Linsieme `Term` dei termini di $\mathcal{L}$ è linsieme definito dalle seguenti regole:

1. Ogni simbolo di costante e di variabile è un termine
2. Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e f è un simbolo di funzione n-aria, $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine (detto *termine funzionale*).

Esempi: $x, c, f(x, y + c), \ldots$

Formule atomiche

Linsieme `Atom` degli atomi o formule atomiche è definito dalle seguenti regole:

1. $\top$ e $\bot$ sono atomi
2. Se t_1 e t_2 sono termini allora $t_1 = t_2$ è un atomo
3. Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e P è un simbolo di predicato n-ario, allora $P(t_1, \ldots, t_n)$ è un atomo.

Esempi: $c = d, P(x), Q(x, c), R(x, f(x, y + c)), \ldots$

Esempi di termini e formule atomiche

Prendiamo *casaDi*, *batteriaDi* etc. come funzioni unarie. Prendiamo *Grande* (unario), *PiuGrande* (binario) etc. come relazioni. Prendiamo *Giovanni*, *Dante* etc. come costanti (nomi).

- Termini: *casaDi(Giovanni)* *batteriaDi(MiaPanda)*
  autoreDi(DivinaCommedia)
  $x + (2 \times y)$ $f(x, y, g(z, t + 3))$

- Formule Atomiche: *Grande(casaDi(Giovanni))*
  PiuGrande(casaDi(Giovanni), casaDi(Filippo))
  autoreDi(DivinaCommedia) = Petrarca
  autoreDi(DivinaCommedia) = Dante
  $x + (2 \times y) = 0$ $f(x, y, g(z, t + 3)) = f(x, y, w)$

Formule

L'insieme delle formule di $\mathcal{L}$ è l'insieme definito dalle regole:

1. Ogni atomo è una formula
2. Se A è una formula, allora $\neg A$ è una formula
3. Se $\circ$ è un connettivo binario, A e B due formule, allora $A \circ B$ è una formula
4. Se A è una formula, x una variabile, allora $\forall x A$ e $\exists x A$ sono formule

Esempi: $P(x), \exists x Q(x,c), \forall z R(x, f(x, y+c)), \ldots$

Esempi di formule

- ▷ $\textit{Grande(casaDi(Giovanni))} \wedge$
  $\textit{PiuGrande(casaDi(Giovanni), casaDi(Filippo))}$
- ▷ $\forall t\ \textit{Scarica(batteriaDi(MiaPanda), t)}$
- ▷ $\forall x\ x = \textit{autoreDi(Divinacommedia)} \wedge \textit{NatoA(Firenze,x)}$
- ▷ $\forall x\ x + (2 \times y) = 0 \wedge \neg f(x, y, g(z, t)) = 1$
- ▷ $\forall x \exists y\ \textit{Ama(x, y)}$ - tutti hanno qualcuno da amare
- ▷ $\forall x \exists y\ \textit{Ama(y, x)}$ - ognuno è amato da qualcuno
- ▷ $\exists x \forall y\ \textit{Ama(x, y)}$ - c'è qualcuno che ama tutti
- ▷ $\exists x \forall y\ \textit{Ama(y, x)}$ - c'è qualcuno che tutti amano

Precedenza degli operatori

L'ordine di precedenza tra gli operatori logici è il seguente:

$$\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Quindi l'espressione

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y \exists z Q(y, z) \wedge \neg \forall x R(x)$$

equivale a

Precedenza degli operatori

L'ordine di precedenza tra gli operatori logici è il seguente:

$$\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Quindi l'espressione

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y \exists z Q(y, z) \wedge \neg \forall x R(x)$$

equivale a

$$(\forall x(P(x)) \rightarrow ((\exists y(\exists z Q(y, z))) \wedge (\neg(\forall x(R(x))))))$$

Varianti notazionali (da Russel & Norvig)

Elemento di sintassi	Libro	Altri
Negazione (not)	$\neg P$	$\sim P \quad \overline{P}$
Congiunzione (and)	$P \wedge Q$	$P \& Q \quad P \cdot Q \quad PQ \quad P,Q$
Disgiunzione (or)	$P \vee Q$	$P \mid Q \quad P;Q \quad P+Q$
Implicazione (se)	$P \Rightarrow Q$	$P \rightarrow Q \quad P \supset Q$
Equivalenza (sse)	$P \Leftrightarrow Q$	$P \equiv Q \quad P \leftrightarrow Q$
Universale (perOgni)	$\forall x \; P(x)$	$(\forall x)P(x) \quad \bigwedge x \; P(x) \quad P(x)$
Esistenziale (esiste)	$\exists x \; P(x)$	$(\exists x)P(x) \quad \bigvee x \; P(x) \quad P(Sk_i)$
Relazione	$R(x,y)$	$(R \; x \; y) \quad Rxy \quad xRy$

Variabili in termini e formule atomiche

Usiamo $\mathtt{Var}(t)$ per indicare linsieme delle variabili del termine t.

Un termine si dice *chiuso* (ground) se non contiene variabili, cioè $\mathtt{Var}(t) = \emptyset$. Esempi: 0, $f(c)$, c^{c+1}

Nelle formule le occorrenze di una variabile x che non sono nel campo di azione di un quantificatore si dicono *libere*, le altre si dicono *vincolate* o *legate*.

Esempi: (1) $\exists x Q(x, c)$, (2) $\forall x, y, z(R(x, f(x, y + c)) \wedge P(z))$, (3) $\forall y R(c_2, f(c_1, y+c_2)) \wedge \exists z P(z)$, (4) $\forall x \exists y\, (Q(x, y) \wedge x = f(y+c))$ (5) $P(x)$, (6) $\forall z(R(x, f(x, y + c)) \wedge P(z))$, (7) $\forall z R(x, f(x, y + c))$

Un *enunciato* o *formula chiusa* è una formula senza occorrenze libere di variabili come, ad esempio, le formule (1)-(4)

Logica del primo ordine: semantica

Interpretazioni e modelli

Strutture

Una struttura per il linguaggio $\mathcal{L}$ è una coppia $\mathcal{A} = \langle D, I \rangle$ dove

- D è un insieme <u>non vuoto</u> (il *dominio* di $\mathcal{A}$)
- I è una funzione (*interpretazione*) tale che
  - ▷ se P è un predicato n-ario, P^I è una relazione n-aria, cioè $P^I \subseteq D^n$
  - ▷ se f è una funzione n-aria, f^I è una funzione da D^n a D
  - ▷ se c è una costante, $c^I \in D$

Interpretiamo $\forall x \exists y P(x, y)$

- $D =$ l'insieme degli esseri umani
- $P^I =$ l'insieme delle coppie (A, B) con B padre di A

  Significato: *tutti gli esseri umani hanno un padre*
- $D =$ l'insieme degli esseri umani
- $P^I =$ l'insieme delle coppie (A, B) con $A \neq B$ e B conosce A

  Significato: *per ogni essere umano c'è qualcuno che lo conosce*

Nella seguente cambia anche il dominio

- $D =$ l'insieme delle province italiane
- $P^I =$ l'insieme delle coppie (A, B) con A e B province contermini

  Significato: *ogni provincia italiana confina con un'altra provincia*

Verità in una struttura

Usiamo $\mathtt{Var}$ per linsieme delle variabili di un linguaggio $\mathcal{L}$.

Si dice *assegnazione*, o *ambiente*, in una struttura $\mathcal{A} = \langle D, I \rangle$ una funzione η che ha $\mathtt{Var}$ per dominio e D per codominio:

$$\eta : \mathtt{Var} \to D$$

η associa a ciascuna variabile del linguaggio $\mathcal{L}$ un valore in D.

Nel caso di formule aperte, l'interpretazione è ottenuta utilizzando per le variabili libere il valore fornito dalla funzione η.

In ciò che segue noi ci limitiamo a considerare solo formule chiuse.

Soddisfacibilità di una formula

Data una struttura $\mathcal{A}$, la soddisfacibilità di una formula chiusa φ in $\mathcal{A}$ si denota:

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

Questa, intuitivamente, dice che la struttura $\mathcal{A}$ soddisfa φ se e solo se è vera linterpretazione di φ fornita da $\mathcal{A}$.

Soddisfacibilità: definizione per casi - 1

Sia $\mathcal{A} = \langle D, I \rangle$ una struttura per il linguaggio $\mathcal{L}$

1. $\mathcal{A} \models \top$ e $\mathcal{A} \not\models \bot$
2. Se A è una formula atomica del tipo $P(t_1, \ldots, t_n)$, allora $\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sse $t_1^{I,\eta}, \ldots, t_n^{I,\eta} \in P^I$
3. se A è una formula atomica del tipo $t_1 = t_2$ allora $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$ sse $t_1^{I,\eta} = t_2^{I,\eta}$
4. $\mathcal{A} \models \neg A$ sse $\mathcal{A} \not\models A$
5. $\mathcal{A} \models A \wedge B$ sse $\mathcal{A} \models A$ e $\mathcal{A} \models B$
6. $\mathcal{A} \models A \vee B$ sse $\mathcal{A} \models A$ oppure $\mathcal{A} \models B$
7. $\mathcal{A} \models (A \rightarrow B)$ sse $\mathcal{A} \models A$ implica $\mathcal{A} \models B$

Soddisfacibilità: definizione per casi - 2

8. $\mathcal{A} \models (A \leftrightarrow B)$ sse $\mathcal{A} \models A$ e $\mathcal{A} \models B$ oppure $\mathcal{A} \not\models A$ e $\mathcal{A} \not\models B$

   Nei due casi rimanenti, scriviamo $A_{\{d=x\}}$ per denotare la sostituzione (nella formula A) delle occorrenze di x con d.

9. $\mathcal{A} \models \forall x A$ sse **per ogni** $d \in D$ è verificato che $\mathcal{A} \models A_{\{x=d\}}$
10. $\mathcal{A} \models \exists x A$ sse **esiste un** $d \in D$ per cui è verificato che $\mathcal{A} \models A_{\{x=d\}}$

Esempi di soddisfacibilità - 1

Formula 1

$$\exists x(P(x) \land Q(x))$$

La formula è verificata in $\mathcal{A}$ se esiste un $d \in D$ per il quale si ha: $\mathcal{A} \models (P(x) \land Q(x))_{\{x=d\}}$
In altri termini se esiste un $d \in D$ che soddisfi sia P sia Q, cioè $d \in P^I \cap Q^I$

Formula 2

$$\exists x(P(x) \to Q(x))$$

La formula è verificata in $\mathcal{A}$ se esiste un $d \in D$ per il quale
$\mathcal{A} \models (P(x) \to Q(x))_{\{x=d\}}$
cioè se esiste un $d \in D$ tale che $d \in (D \setminus P^I) \cup Q^I$. Nota che questa formula è verificata da tutti gli elementi anche quando P^I è l'insieme vuoto (vedi gli esempi a pag. 12)

Esempi di soddisfacibilità - 2

<u>Formula 3</u>

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

La formula è verificata in $\mathcal{A}$ se per ogni $d \in D$ è verificato che $\mathcal{A} \models (P(x) \wedge Q(x))_{\{x=d\}}$
cioè se P^I e Q^I coincidono entrambi con il dominio D

<u>Formula 2</u>

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

La formula è verificata in $\mathcal{A}$ se per ogni $d \in D$ è verificato che $\mathcal{A} \models (P(x) \rightarrow Q(x))_{\{x=d\}}$
cioè se $P^I \subseteq Q^I$. In particolare, questa formula è verificata da tutti gli elementi ogniqualvolta P^I è l'insieme vuoto
(nota che è verificata anche se P^I e Q^I sono entrambi vuoti!)

Essere veri ed Essere modelli

Data una formula chiusa A, se $\mathcal{A} \models A$ allora si dice che $\mathcal{A}$ è un *modello* di A, equivalentemente che A è *vera* in $\mathcal{A}$.

Una formula A del linguaggio $\mathcal{L}$ (scritto $A \in \mathcal{L}$) è *valida* sse è vera in tutte le strutture di $\mathcal{L}$. In questo caso scriviamo $\models A$.

Un insieme di formule Γ di $\mathcal{L}$ è *soddisfacibile* sse esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models A$ per ogni formula $A \in \Gamma$.

Problema. Come verificare la soddisfacibilità e la validità di una formula? Nella logica dei predicati avevamo le tavole di verità. Ora ci serve qualcosa di più...

Conseguenza logica ed Equivalenza logica

Sia Γ un insieme di formule e A una formula chiusa.

Γ *implica logicamente* A, scritto $\Gamma \models A$, sse per ogni struttura $\mathcal{A}$ del linguaggio per cui $\mathcal{A} \models B$ per ogni $B \in \Gamma$, si ha che $\mathcal{A} \models A$.

Due formule A e B si dicono *semanticamente* (o *logicamente*) equivalenti, scritto $A \equiv B$, sse per tutte le strutture $\mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \models A$ sse $\mathcal{A} \models B$

Esempi di formule equivalenti

Sono semanticamente equivalenti formule che differiscono solo per

- il nome delle variabili vincolate
  $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$
- l'ordine dei quantificatori dello stesso tipo
  $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
  (dunque possiamo scrivere $\forall x, y P(x, y)$)
- l'eliminazione di quantificatori che non vincolano alcuna variabile nella formula
  $\forall x P(y) \equiv P(y)$

Equivalenze con quantificatori e negazione

Esempi importanti di formule semanticamente equivalenti

- $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$
- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Equivalenze con quantificatori, $\wedge$ e $\vee$

Altri esempi importanti di formule semanticamente equivalenti

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\forall x(P(x) \vee Q) \equiv (\forall x P(x)) \vee Q$ se $x \notin \mathtt{Var}(Q)$
- $\exists x(P(x) \wedge Q) \equiv (\exists x P(x)) \wedge Q$ se $x \notin \mathtt{Var}(Q)$

Equivalenze con quantificatori e implicazione

Altri esempi importanti di formule semanticamente equivalenti

- $(\forall x P) \rightarrow Q \equiv \exists x(P \rightarrow Q)$
- $(\exists x P) \rightarrow Q \equiv \forall x(P \rightarrow Q)$
- $P \rightarrow \forall x Q \equiv \forall x(P \rightarrow Q)$
- $P \rightarrow \exists x Q \equiv \exists x(P \rightarrow Q)$

Tute le equivalenze viste, utilizzate opportunamente, permettono di riscrivere una formula ponendo tutti i quantificatori all'inizio.

Logica del primo ordine: deduzione

Deduzione in logica del primo ordine

- regole di inferenza per i quantificatori
- regola del modus ponens
- metodo di risoluzione

Sostituzioni - 1

L'inferenza al primo ordine richiede di *sostituire* dei singoli individui alle variabili.

Una *sostituzione* è una funzione dall'insieme delle variabili `Var` all'insieme dei termini `Term`.

La sostituzione σ di un termine t al posto di un simbolo di variabile x è indicata con $\{x/t\}$ oppure $\{t = x\}$

L'applicazione della sostituzione σ all'espressione A si indica $A\sigma$ (sostituzione simultanea delle variabili libere con i termini corrispondenti), oppure $A[x/t]$ per una sola variabile.

Sostituzioni - 2

Notazione di R&N:
$Sost(\sigma, A)$ indica l'applicazione della sostituzione σ ad A
Ad esempio:
$Sost(\{x/Sam, y/Pam\}, Piace(x, y)) = Piace(Sam, Pam)$

Notazione di R&N (usata anche da noi):
le parentesi che racchiudono il campo di azione di un quantificatore vengono omesse quando il campo d'azione è l'intera formula.
Ad esempio:
$\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ è una abbreviazione per la formula
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Eliminazione degli universali

$$\frac{\forall x A}{Sost(\{x/t\}, A)}$$

dove A è una formula, x una variabile e t un termine privo di variabili (termine *ground*)

Ad esempio da: $\forall x Piace(x, Gelato)$,
possiamo usare la sostituzione $\{x/Ben\}$
e inferire $Piace(Ben, Gelato)$.

Non funziona se invece usiamo la sostituzione $\{x/y\}$
Qual è il motivo?

Eliminazione degli esistenziali

$$\frac{\exists x A}{Sost(\{x/k\}, A)}$$

dove A è una formula, x una variabile e k un simbolo di costante che non appare altrove

Ad esempio da: $\exists x Uccide(x, Vittima)$,
possiamo usare la sostituzione $\{x/Assassino\}$
e inferire $Uccide(Assassino, Vittima)$
purché *Assassino* non appaia altrove nella base di conoscenza.
Sapete dire il motivo di questa restrizione?

Introduzione degli esistenziali

$$\frac{A}{\exists x Sost(\{t/x\}, A)}$$

dove A è una formula, x una variabile che non appare in A e t un termine ground che appare in A

Ad esempio da: $Piace(Jerry, Gelato)$,
possiamo inferire $\exists x Piace(x, Gelato)$

Perché t deve essere ground?
Perché x non può apparire in A?

Introduzione degli esistenziali

Il caso (vedi Russell & Norvig)
La legge dice che è un crimine la vendita da parte di un americano di armi a nazioni ostili.
La nazione $Nono$, nemica dell$America$, possiede dei missili; tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal colonnello $West$, che è un americano.

Vorremmo dimostrare che $West$ è un criminale.

La base di conoscenza

$$
\begin{aligned}
&\forall x, y, z \;\; (Americano(x) \land Arma(y) \land Nazione(z) \land Ostile(z) \\
&\qquad\qquad \land Vende(x, z, y) \Rightarrow Criminale(x)) \\
&\exists x \;\; (Possiede(Nono, x) \land Missile(x)) \\
&\forall x \;\; (Possiede(Nono, x) \land Missile(x) \Rightarrow Vende(West, Nono, x)) \\
&\forall x \;\; (Missile(x) \Rightarrow Arma(x)) \\
&\forall x \;\; (Nemico(x, America) \Rightarrow Ostile(x)) \\
&Americano(West) \\
&Nazione(Nono) \\
&Nemico(Nono, America) \\
&Nazione(America)
\end{aligned}
$$

Ricerca della dimostrazione

1. Stato iniziale = KB
2. Operatori = regole di inferenza applicabili
3. Test obiettivo = KB contenente $Criminale(West)$

- La dimostrazione si conclude in 14 passi.
- L'eliminazione degli universali è problematica: può avere da sola un costo enorme nella ricerca della dimostrazione.
- La combinazione di formule atomiche in congiunzioni (per poi applicare il Modus Ponens) richiede molto lavoro.

La tecnica della proposizionalizzazione

Consiste nell'applicare sistematicamente le regole di eliminazione degli universali e degli esistenziali.

L'eliminazione di un universale richiede l'applicazione della regola per tutti i simboli di costante.

Se ci sono *simboli di funzione* il numero dei termini che rappresentano individui del dominio è *infinito*: $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots$

Il *teorema di Herbrand* garantisce che se esiste una dimostrazione si può costruire con un numero finito di termini.

La deduzione con la tecnica della proposizionalizzazione è *semidecidibile*: se la dimostrazione esiste il metodo la trova ma se non esiste il metodo non sempre termina.

Modus Ponens generalizzato

$$\frac{p'_1, p'_2, \ldots, p'_n,\ (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q)}{Sost(\theta, q)}$$

dove p_i, p'_i e q sono formule atomiche,
ed esiste un **unificatore** θ tale che $Sost(\theta, p'_i) = Sost(\theta, p_i)$, per ogni i.

$n + 1$ premesse : le n formule atomiche p'_i e l'implicazione

conclusione: il risultato dell'applicazione della sostituzione al conseguente q.

Nota: non fornisce un metodo di inferenza completo

Esempio di unificazione

West ed il missile:

$p_1{}'$ è $Missile(M1)$
$p_2{}'$ è $Possiede(y, M1)$
θ è $\{x/M1, y/Nono\}$
$\mathsf{Sost}(\theta, q) = Vende(West, Nono, M1)$

p_1 è $Missile(x)$
p_2 è $Possiede(Nono, x)$
q è $Vende(West, Nono, x)$

La deduzione

Nella deduzione in logica del primo ordine le seguenti hanno un ruolo fondamentale

- l'unificazione per rendere efficiente il processo di istanziazione delle variabili
- l'eliminazione dei quantificatori esistenziali (Skolemizzazione)

Torniamo alla base di conoscenza di Russell & Norvig

$1 - Americano(x) \wedge Arma(y) \wedge Nazione(z) \wedge Ostile(z)$
$\wedge \ Vende(x, z, y) \Rightarrow Criminale(x)$
$2 - Possiede(Nono, M1)$
$3 - Missile(M1)$
$4 - Possiede(Nono, x) \wedge Missile(x) \Rightarrow Vende(West, Nono, x)$
$5 - Missile(x) \Rightarrow Arma(x)$
$6 - Nemico(x, America) \Rightarrow Ostile(x)$
$7 - Americano(West)$
$8 - Nazione(Nono)$
$9 - Nemico(Nono, America)$
$10 - Nazione(America)$

... in classe abbiamo derivato *Criminale(West)*
e visto il processo di Skolemizzazione.

Vediamo come scrivere una prova

Mostriamo solo parte della prova.
Per questioni di spazio, scriviamo M per $Missile$, Ar per $Arma$, Am per $America$, Ne per $Nemico$, No per $Nono$ e O per $Ostile$

$$\dfrac{\dfrac{M(M1) \quad M(x) \rightarrow Ar(x)}{Ar(M1)}(i) \quad \dfrac{Ne(No, Am) \quad Ne(x, Am) \rightarrow O(x)}{O(No)}(ii) \quad \ldots}{Criminale(West)}(iii)$$

I puntini vanno sostituiti con la derivazione di $Vende(West, Nono, M1)$ a partire da 2-, 3- e 4- nella base di conoscenza.

Q.: Sapete indicare gli unificatori per le deduzioni (i), (ii) e (iii)?

Esempio di deduzione

Proviamo la seguente formula

$$A \land \exists x P(x) \to \exists x (A \land P(x))$$

La derivazione non usa nessuna informazione esterna alla logica stessa. Si tratta di ottenere $\forall x (A \land P(x))$ a partire da $A \land \forall x P(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \land \forall x P(x)}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{A \land \exists x P(x)}{\exists x P(x)}}{P(a)}}{A \land P(a)}}{\exists x (A \land P(x))}$$

Quali regole abbiamo usato?
Che condizioni ci sono su a?