Introduzione alla logica
La logica proposizionale

Borgo, Guarino
Laboratory for Applied Ontology, ISTC-CNR, www.loa-cnr.it
Corso AI, Univ. di Trento 2007

Argomenti trattati

- ▷ Rappresentazione delle conoscenze
- ▷ Logica proposizionale
  - Analisi preliminare
  - Proposizioni e Connettivi
  - Tavole di verità
  - Modelli
  - Conseguenza logica
  - Leggi logiche e Inferenze

Rappresentazione di conoscenza

▷ Rappresentare in modo esplicito quello che si sa (o interessa) di problema, situazione, stato del mondo.

- Conoscenza *dichiarativa*: si rappresentano concetti generici, relazioni, individui e fatti (es. il cervello è parte del corpo)
- Conoscenza *procedurale*: si rappresenta il come si effettuano azioni complesse (es. guidare una macchina).

Sistemi di rappresentazione della conoscenza (KR) in Intelligenza Artificiale: la logica, le reti semantiche, i frame, le logiche descrittive, i sistemi a regole.

Argomentare

Il ragionamento può assumere varie forme ma essenzialmente si basa su inferenze: si parte da premesse e si ricava una conclusione.

▷ *Ragionamento deduttivo*: la conclusione è una "conseguenza" delle premesse.

▷ *Ragionamento induttivo*: la conclusione è una "generalizzazione" delle premesse.

▷ *Ragionamento abduttivo*: la conclusione è una ipotesi che "spiega" i fatti delle premesse.

▷ *Ragionamento per default*: la conclusione è "rivedibilile".

La logica proposizionale

Analisi preliminare - 1

Si comincia con un sistema di proposizioni (affermazioni) Φ considerate vere e caratteristiche di un certo fenomeno che vogliamo studiare. Il logico e' interessato a trovare le proposizioni che "seguono" da Φ. L'idea e' che una proposizione p segue da Φ se esiste una "prova" che parte da proposizioni contenute in Φ e si conclude con p.

Ci sono due modi di derivare proposizioni da Φ:

1. Trovare una proposizione che è vera se sono vere le proposizioni in Φ
2. Trovare una proposizione che è provabile a partire da quelle in Φ

Nota: i due approcci non sono sempre equivalenti.

Analisi preliminare - 2

Le proposizioni del linguaggio naturale (ad es. l'italiano) sono spesso ambigue: si possono interpretare in modi diversi e ottenere conseguenze incompatibili.

Per evitare che dalle stesse proposizioni di possa arrivare a conclusioni incompatibili, è necessario trovare un linguaggio alternativo che non sia affetto da l'ambiguità.

La logica definisce e utilizza linguaggi nuovi (linguaggi formali) di cui stabilisce esplicitamente la semantica in modo che ad ogni espressione ammessa nel linguaggio considerato si possa attribuire un unico e preciso significato.

Analisi preliminare - 3

La sintassi

Ci servono un insiemi di simboli (un alfabeto) e delle regole per combinare simboli in modo da ottenere espressioni. Ovviamente si segue, per quanto possibile, il linguaggio naturale.

▷ Dato il linguaggio, la nozione di “prova” (*deduzione*) è fornita da un insieme di regole “sintattiche”

La semantica

Quando il linguaggio e' stabilito, definiamo il significato di una formula associando ogni elemento di una espressione ad un elemento nella “struttura” (situazione, modello).

▷ Data la semantica, la nozione di “segue da” (*conseguenza logica*) è fornita da queste strutture (p segue da Φ se p vale in ogni struttura dove tutte le proposizioni di Φ valgono)

Perché usarla?

Non basta rappresentare la conoscenza, bisogna anche poter ragionare su di essa. La logica fornisce uno strumento affidabile per ragionare sulla conoscenza rappresentata esplicitamente.

$$\begin{array}{rccc} \textbf{Realtà di interesse}: & \text{Fatti} & \longrightarrow & \text{Fatti} \\ & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \textbf{Rappresentazione}: & \text{Formule} & \longrightarrow & \text{Formule} \end{array}$$

Proposizioni e Connettivi - 1

Alfabeto (o vocabolario) della logica proposizionale:

- ▷ lettere proposizionali: $a, b, c, \ldots$
  le lettere proposizionali stanno ad indicare le *proposizioni atomiche* del linguaggio (queste sono enunciati senza pronomi dimostrativi, indessicali o simili; inoltre escludiamo le forme interrogative, imperative, etc.)
  Ad es. possiamo stabilire di scrivere
  a per “Fa freddo”, b per “Michela mangia una mela” etc.
- ▷ connettivi:
  $\neg$ (non) , & (e) , $\vee$ (o) , $\rightarrow$ (implica) , $\leftrightarrow$ (se e solo se)
- ▷ parentesi: (,)

Proposizioni e Connettivi - 2

Con i connettivi possiamo costruire proposizioni composte:

- "Non fa freddo" diventa formalmente: $\neg a$
- "Se fa freddo allora Michela mangia una mela": $a \rightarrow b$
- "Fa freddo e Michela mangia una mela": $a \& b$

L'insieme delle proposizioni atomiche e delle proposizioni composte è l'insieme dell *formule proposizionali* (o proposizioni). Le indichiamo con le lettere maiuscole $A, B, C, P_1, P_2, \ldots$

Proposizioni e Connettivi - 3

Solo alcune combinazioni di simboli hanno un senso compiuto e quindi sono associate ad un significato. Queste combinazioni si chiamano *formule ben formate* (fbf).

$\triangleright$ Regole per la formazione di formule ben formate:

- Qualsiasi lettera proposizionale è una fbf
- Se P è una fbf allora anche $\neg P$ è una fbf
- Se P e Q sono fbf allora lo sono anche $(P \& Q), (P \vee Q)$, $(P \to Q), (P \leftrightarrow Q)$
- Nient'altro è una fbf

Tavole di verità - 1

In logica si assume che:

- ▷ ci sono due distinti valori di verità: Vero (V) e Falso (F)
- ▷ in ogni situazione, una proposizione è associata ad un valore di verità, in particolare:
  - non può essere contemporaneamente vera e falsa
  - non può essere contemporaneamente né vera né falsa

Le tavole di verità forniscono una lista *esaustiva* di tutte le situazioni possibili per la verità di una proposizione composta.

Tavole di verità - 2

Il valore di verità di ogni formula composta dipende (in modo automatico) dal valore di verità delle sue formule atomiche.

Per questo si dice che i connettivi sono *vero-funzionali*, essi corrispondono a funzioni sui valori di verità delle formule componenti.

`Tavole ed esempi alla lavagna`
(include le leggi logiche e l'uso delle tavole di verità per la verifica di leggi logiche e regole di inferenza)

Modelli

Le tavole possono essere usate per trovare, se esistono, delle situazioni (modelli) dove tutte le proposizioni di interesse siano vere.

- ▷ Considera le formule $(P \rightarrow Q)$, $(P \rightarrow \neg Q)$, $(Q \vee P)$
  C'e' una situazione in cui sono tutte vere?
- ▷ Considera le formule $(P \rightarrow \neg Q)$, $(Q \& P)$
  C'e' una situazione in cui sono tutte vere?

Modelli: cosa possiamo dire di una formula sempre vera? di una sempre falsa? di una vera in certe situazioni e falsa in altre?
Una formula si dice *valida* se è vera in tutti i modelli.

Conseguenza logica

Il simbolo '$\models$' indica la *conseguenza logica*: ogni modello per le formule a sinistra di $\models$ (le ipotesi) è un modello per la formula a destra di $\models$ (la tesi).

Caso di forma argomentativa valida: $(P \rightarrow Q)$, $(P \rightarrow \neg Q) \models \neg P$

Caso di forma argomentativa non valida: $(P \rightarrow Q) \models \neg P$

(Verificarle con le tavole di verità)

Regole di inferenza - 1

Le regole di inferenza permettono di stabilire se una formula segue deduttivamente (è provabile) a partire dalle ipotesi date. Le conoscenze iniziali su cui si basa la deduzione sono gli *assiomi* (asserzioni date, non hanno bisogno di essere provate). Le conoscenze che vengono derivate si chiamano *teoremi*.

Nota: l'ordine delle premesse in una prova non è importante.

Per indicare che un teorema è stato derivato da un insieme di assiomi si usa il simbolo di derivabilità sintattica $\vdash$:
$P_1, \ldots, P_n \vdash Q$

C'è un'analogia tra '$\vdash$' e '$\models$' ma i simboli hanno un significato diverso e <u>non vanno confusi!</u>

Regole di inferenza - 2

- $\triangleright$ *Eliminazione delle implicazioni* (Modus Ponens):
  $(A \rightarrow B)$, $A \vdash B$
  se $A \rightarrow B$ è provabile e A è provabile, allora B è provabile.
- $\triangleright$ *Modus Tollens*: $(A \rightarrow B)$, $\neg B \vdash \neg A$
  se $A \rightarrow B$ è provabile e $\neg B$ è provabile, allora $\neg A$ è provabile.
- $\triangleright$ *Introduzione della congiunzione*: $A, B \vdash (A \& B)$
- $\triangleright$ *Eliminazione congiunzione*: $(A \& B) \vdash A$ e $(A \& B) \vdash B$
- $\triangleright$ *Introduzione della disgiunzione*: $A \vdash (A \vee B)$
- $\triangleright$ *Eliminazione disgiunzione*: $(A \vee B), \neg A \vdash B$ e $(A \vee B), \neg B \vdash A$

Regole di inferenza - 3

La dimostrazione di un teorema è un processo di soluzione di un problema.

- ▷ Lo stato iniziale è fornito dalle premesse (assiomi).
- ▷ Lo stato finale è dato dalla conclusione (teorema).
- ▷ Gli operatori sono le inferenze che si possono applicare.

Le tavole di verità sono inefficienti perché diventano facilmente molto grandi (crescita esponenziale).

Le regole di inferenza hanno lo stesso problema, ma si può introdurre una regole di risoluzione che semplifica il procedimento di dimostrazione perché permette di ridurre il numero di formule da considerare ad ogni passo.

Regola di risoluzione - 1

Si applica a due (o più) proposizioni del tipo A oppure $A \vee B$

$$\frac{(A \vee B),\ (\neg B \vee C)}{(A \vee C)}$$

$$\frac{B, \neg B}{\perp}$$ (dove $\perp$ è una proposizione sempre falsa)

Regola di risoluzione - 2

La regola di risoluzione è corretta e completa per la logica proposizionale.

- ▷ *Corretta*: partendo da premesse vere, permette di ottenere sempre conclusioni vere.
- ▷ *Completa*: per qualsiasi insieme di assiomi, se esso è inconsistente, la regola di risoluzione porta ad ottenere una contraddizione ($\perp$).

Da quanto detto segue che se un teorema è una conseguenza logica di un insieme di assiomi, allora è possibile dimostrarlo usando come regola di inferenza la sola risoluzione.